Minimizzazione booleana tramite Mappe di Karnaugh

Tra le proprietà dell'algebra di Boole, le seguenti consentono di semplificare notevolmente le espressioni booleane:

$$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \cdot (B + \overline{B}) = A$$

$$A \cdot (\overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C + B \cdot C + B \cdot \overline{C}) = A$$

Le mappe di Karnaugh sono una particolare forma di tabella di verità, che consente di individuare immediatamente la possibilità di fare queste semplificazioni.

Ad esempio, la seguente tabella di verità della funzione **Y = Y(A,B,C)**

A	**B**	**C**	**Y**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

può essere ridisegnata così:

A	*0*	*0*	*1*	*1*
B	*0*	*1*	*1*	*0*
C				
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Mappa di Karnaugh della funzione **Y**

Dalla tabella di verità o dalla mappa di Karnaugh è immediato ottenere l'espressione booleana della funzione **Y** come "somma" di "prodotti", cioè come OR di tanti termini AND quante sono le caselle in cui la funzione vale 1; ciascuno di questi termini AND (detti *minterm*) è costituito dall'AND delle variabili di ingresso, negate oppure no a seconda che il valore della variabile associato a quella casella sia 0 oppure 1.

$$Y = A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C$$

Nel caso di funzioni di 4 variabili, ad es. **Z = Z(A,B,C,D)**, la mappa di Karnaugh ha 4 righe e quattro colonne:

A	*0*	*0*	*1*	*1*
CD \ B	*0*	*1*	*1*	*0*
00	0	0	1	0
01	1	0	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	0

Mappa di Karnaugh della funzione **Z**

Nelle mappe di Karnaugh i valori della funzione **Y** sono scritti dentro le caselle.

I valori delle variabili **A,B,C,D** sono indicati come "coordinate" delle caselle. Esaminando queste "coordinate, si constata che le coppie di valori di **A** e **B** (di **C** e **D**) associate alle colonne (alle righe) sono ordinate in modo che tra due caselle adiacenti (della medesima riga o della medesima colonna) cambia il valore di una sola delle variabili, mentre quello di tutte le altre rimane lo stesso; questa proprietà vale anche tra le caselle estreme di ciascuna riga e di ciascuna colonna (che, sotto questo aspetto, possono quindi essere considerate "adiacenti", in senso circolare).

Si osserva che, in virtù di questo fatto, a ciascuna coppia di caselle adiacenti contrassegnate con il valore 1 corrispondono, nella espressione booleana, due termini “prodotto” (minterm) nei quali una variabile è presente negata in uno e non negata nell’altro, mentre tutte le altre variabili hanno lo stesso valore. E` allora possibile semplificare l’espressione sostituendo quei due termini con un unico termine nel quale non è più presente la variabile che cambia valore. Ad esempio le ultime due caselle della seconda riga nella mappa della funzione **Y** portano alla seguente semplificazione:

$$A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C = A \cdot C$$

Allo stesso modo, quaterne di caselle adiacenti tutte con il valore 1 (sulla stessa riga o sulla stessa colonna) corrispondono a quattro termini che si riducono ad uno; ad esempio le quattro caselle della terza riga nella mappa della funzione Z portano alla seguente semplificazione:

$$C \cdot D \cdot (\overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B + A \cdot \overline{B}) = C \cdot D$$

le quattro caselle della terza colonna nella mappa della funzione **Z** portano alla seguente semplificazione:

$$A \cdot B \cdot (\overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{C} \cdot D + C \cdot D + C \cdot \overline{D}) = A \cdot B$$

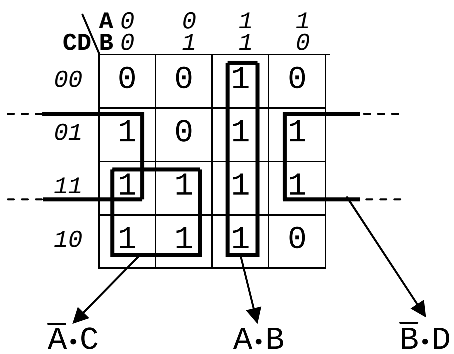
Così pure quaterne adiacenti disposte secondo un quadrato producono un unico termine; ad esempio le quattro caselle in basso a sinistra nella mappa della funzione **Z** portano alla seguente semplificazione:

$$\overline{A} \cdot C \cdot (\overline{B} \cdot \overline{D} + \overline{B} \cdot D + B \cdot D + B \cdot \overline{D}) = \overline{A} \cdot C$$

Analogo discorso vale per gruppi di otto caselle adiacenti tutte con il valore 1.

Per semplificare l’espressione booleana di una funzione, si tratta dunque di individuare, nella relativa mappa di Karnaugh, i gruppi di (2 o 4 o 8) caselle adiacenti con il valore 1.
Nel far ciò conviene tenere presente la proprietà $A+A=A$, che consente di utilizzare più volte la stessa casella (ovvero più volte lo stesso minterm nell’espressione booleana), per formare gruppi diversi, al fine di operare il maggior numero di semplificazioni possibile.
Individuando un insieme di gruppi (da 1, 2, 4 o 8) che copre tutte le caselle in cui compare il valore 1, si ottiene una espressione semplificata, costituita dall’OR dei termini corrispondenti a ciascun gruppo.

Riprendendo l’esempio della funzione **Z**, si possono individuare i gruppi segnati in figura:



Con questi raggruppamenti si ottiene, immediatamente, l’espressione semplificata di **Z**:

$$Z = \overline{A} \cdot C + A \cdot B + \overline{B} \cdot D$$

Nell’esempio si può osservare che si sono considerate adiacenti anche le caselle estreme delle righe o delle colonne.

Si osserva che si possono individuare diversi raggruppamenti che coprono tutte le caselle in cui **Z** vale 1, ciascuno dei quali porta a diverse espressioni di **Z** equivalenti (più o meno semplificate).

Funzioni booleane parzialmente definite

Una funzione booleana si dice parzialmente definita se il suo valore è specificato solo per alcune combinazioni dei valori delle variabili.

Nella pratica si ha a che fare con funzioni booleane parzialmente definite in due casi: o quando le altre combinazioni dei valori delle variabili non si possono verificare mai, oppure quando, anche se si verificano, i corrispondenti valori della funzione non importano (possono essere indifferentemente 0 od 1, perché comunque non vengono usati).

Nella tabella di verità (o nella mappa di Karnaugh) di una funzione parzialmente definita, i valori non specificati sono comunemente indicati con un trattino e corrispondono a ciò che si chiama "**condizioni di indifferenza**", ovvero *don't care conditions (d.c.c.)*.

La presenza delle *d.c.c.* nelle caselle di una mappa di Karnaugh può essere convenientemente sfruttata, sostituendone alcune con il valore 1, al fine di ottenere gruppi (da 2, 4, 8) che portano a semplificare l'espressione della funzione.

Ad esempio, considerando la funzione parzialmente definita **W** la cui tabella di verità è riportata qui sotto insieme con la relativa mappa di Karnaugh:

A	**B**	**C**	**W**
0	0	0	-
0	0	1	1
0	1	0	-
0	1	1	-
1	0	0	1
1	0	1	-
1	1	0	-
1	1	1	0

A	*0*	*0*	*1*	*1*
B	*0*	*1*	*1*	*0*
C				
0	-	-	-	1
1	1	-	0	-

Si possono sostituire due *d.c.c.* con altrettanti 1:

A	*0*	*0*	*1*	*1*
B	*0*	*1*	*1*	*0*
C				
0	1	-	-	1
1	1	-	0	1

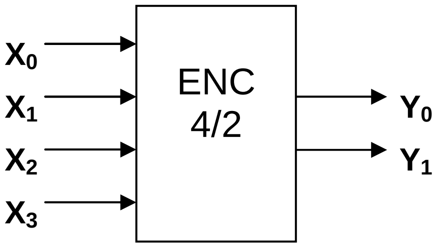
e individuare la quaterna che consente di ottenere la seguente espressione semplificata di **W**:

$$W = \overline{B}$$

Sintesi di un encoder

Si ricorda che il funzionamento di un encoder è basato sull'ipotesi che, in ogni istante, una e una sola delle variabili di ingresso abbia il valore 1.

Si consideri il caso dell'encoder con 4 ingressi e due uscite:



Le due funzioni d'uscita Y_0 ed Y_1 sono, dunque, parzialmente definite perché le combinazioni di valori delle variabili d'ingresso diverse da quelle in cui vi è un solo valore uguale ad 1 non si possono presentare mai (la rete logica a monte sarà tale da produrre valori di X_i che soddisfano questa ipotesi).

Delle 16 righe della tabella di verità sono significative solo le 4 nelle quali Y_0 ed Y_1 sono definite:

X_0	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_0
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1
.	.	.	.	-	-

La corrispondente mappa di Karnaugh per la funzione Y_0 è:

X_2 X_3 \ X_0 X_1	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	-	1	-	0
0 1	1	-	-	-
1 1	-	-	-	-
1 0	0	-	-	-

Sfruttando le condizioni di indifferenza *(d.c.c.)* presenti in questa mappa, si possono disegnare i due raggruppamenti da 8 caselle indicati in figura:

X_2 X_3 \ X_0 X_1	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	-	1	-	0
0 1	1	-	-	-
1 1	-	-	-	-
1 0	0	-	-	-

E ottenere l'espressione semplificata: $Y_0 = X_1 + X_3$

Analogamente si può ottenere: $Y_1 = X_2 + X_3$