

Minimizzazione booleana tramite Mappe di Karnaugh

Tra le proprietà dell'algebra di Boole, le seguenti consentono di semplificare notevolmente le espressioni booleane:

$$A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A \cdot (B + \bar{B}) = A$$

$$A \cdot (\bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C + B \cdot C + B \cdot \bar{C}) = A$$

Le mappe di Karnaugh sono una particolare forma di tabella di verità, che consente di individuare immediatamente la possibilità di fare queste semplificazioni.

Ad esempio, la seguente tabella di verità della funzione $Y = Y(A, B, C)$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

può essere ridisegnata così:

A \ B \ C	0	1	0	1
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Mappa di Karnaugh della funzione Y

Dalla tabella di verità o dalla mappa di Karnaugh è immediato ottenere l'espressione booleana della funzione Y come "somma" di "prodotti", cioè come OR di tanti termini AND quante sono le caselle in cui la funzione vale 1; ciascuno di questi termini AND (detti *minterm*) è costituito dall'AND delle variabili di ingresso, negate oppure no a seconda che il valore della variabile associato a quella casella sia 0 oppure 1.

$$Y = A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C$$

Nel caso di funzioni di 4 variabili, ad es. $Z = Z(A, B, C, D)$, la mappa di Karnaugh ha 4 righe e quattro colonne:

A \ B \ C \ D	0	1	0	1
00	0	0	1	0
01	1	0	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	0

Mappa di Karnaugh della funzione Z

Nelle mappe di Karnaugh i valori della funzione Y sono scritti dentro le caselle.

I valori delle variabili A, B, C, D sono indicati come "coordinate" delle caselle. Esaminando queste "coordinate, si constata che le coppie di valori di A e B (di C e D) associate alle colonne (alle righe) sono ordinate in modo che tra due caselle adiacenti (della medesima riga o della medesima colonna) cambia il valore di una sola delle variabili, mentre quello di tutte le altre rimane lo stesso; questa proprietà vale anche tra le caselle estreme di ciascuna riga e di ciascuna colonna (che, sotto questo aspetto, possono quindi essere considerate "adiacenti", in senso circolare).

Si osserva che, in virtù di questo fatto, a ciascuna coppia di caselle adiacenti contrassegnate con il valore 1 corrispondono, nella espressione booleana, due termini “prodotto” (minterm) nei quali una variabile è presente negata in uno e non negata nell’altro, mentre tutte le altre variabili hanno lo stesso valore. E’ allora possibile semplificare l’espressione sostituendo quei due termini con un unico termine nel quale non è più presente la variabile che cambia valore. Ad esempio le ultime due caselle della seconda riga nella mappa della funzione y portano alla seguente semplificazione:

$$A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C = A \cdot C$$

Allo stesso modo, quaterne di caselle adiacenti tutte con il valore 1 (sulla stessa riga o sulla stessa colonna) corrispondono a quattro termini che si riducono ad uno; ad esempio le quattro caselle della terza riga nella mappa della funzione z portano alla seguente semplificazione:

$$C \cdot D \cdot (\bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B + A \cdot B + A \cdot \bar{B}) = C \cdot D$$

le quattro caselle della terza colonna nella mappa della funzione z portano alla seguente semplificazione:

$$A \cdot B \cdot (\bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{C} \cdot D + C \cdot D + C \cdot \bar{D}) = A \cdot B$$

Così pure quaterne adiacenti disposte secondo un quadrato producono un unico termine; ad esempio le quattro caselle in basso a sinistra nella mappa della funzione z portano alla seguente semplificazione:

$$\bar{A} \cdot C \cdot (\bar{B} \cdot \bar{D} + \bar{B} \cdot D + B \cdot D + B \cdot \bar{D}) = \bar{A} \cdot C$$

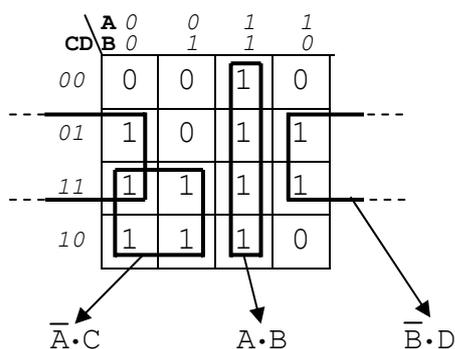
Analogo discorso vale per gruppi di otto caselle adiacenti tutte con il valore 1.

Per semplificare l’espressione booleana di una funzione, si tratta dunque di individuare, nella relativa mappa di Karnaugh, i gruppi di (2 o 4 o 8) caselle adiacenti con il valore 1.

Nel far ciò conviene tenere presente la proprietà $A+A=A$, che consente di utilizzare più volte la stessa casella (ovvero più volte lo stesso minterm nell’espressione booleana), per formare gruppi diversi, al fine di operare il maggior numero di semplificazioni possibile.

Individuando un insieme di gruppi (da 1, 2, 4 o 8) che copre tutte le caselle in cui compare il valore 1, si ottiene una espressione semplificata, costituita dall’OR dei termini corrispondenti a ciascun gruppo.

Riprendendo l’esempio della funzione z , si possono individuare i gruppi segnati in figura:



Con questi raggruppamenti si ottiene, immediatamente, l’espressione semplificata di z :

$$Z = \bar{A} \cdot C + A \cdot B + \bar{B} \cdot D$$

Nell’esempio si può osservare che si sono considerate adiacenti anche le caselle estreme delle righe o delle colonne.

Si osserva che si possono individuare diversi raggruppamenti che coprono tutte le caselle in cui z vale 1, ciascuno dei quali porta a diverse espressioni di z equivalenti (più o meno semplificate).