IEIM 2015-2016

Esercitazione 11
"Codifica Binaria ed Algebra di Bool"

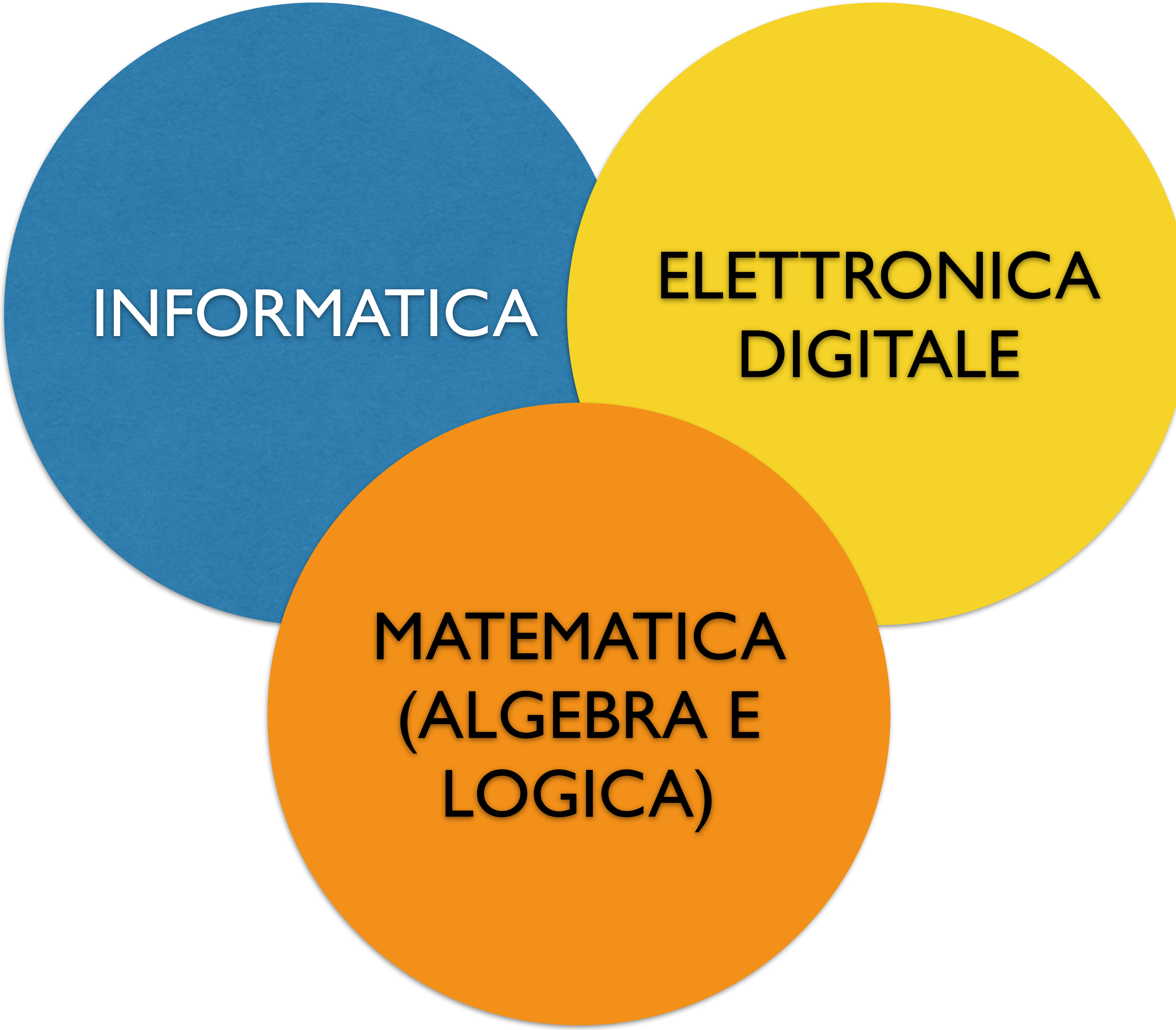
Alessandro A. Nacci
alessandro.nacci@polimi.it - www.alessandronacci.it

Cosa facciamo oggi?

- Un ripasso sulla codifica binaria
  - E un po di esercizi…

- Un ripasso sulla algebra di Boole
  - Con un po di esercizi…

La lezione di oggi…



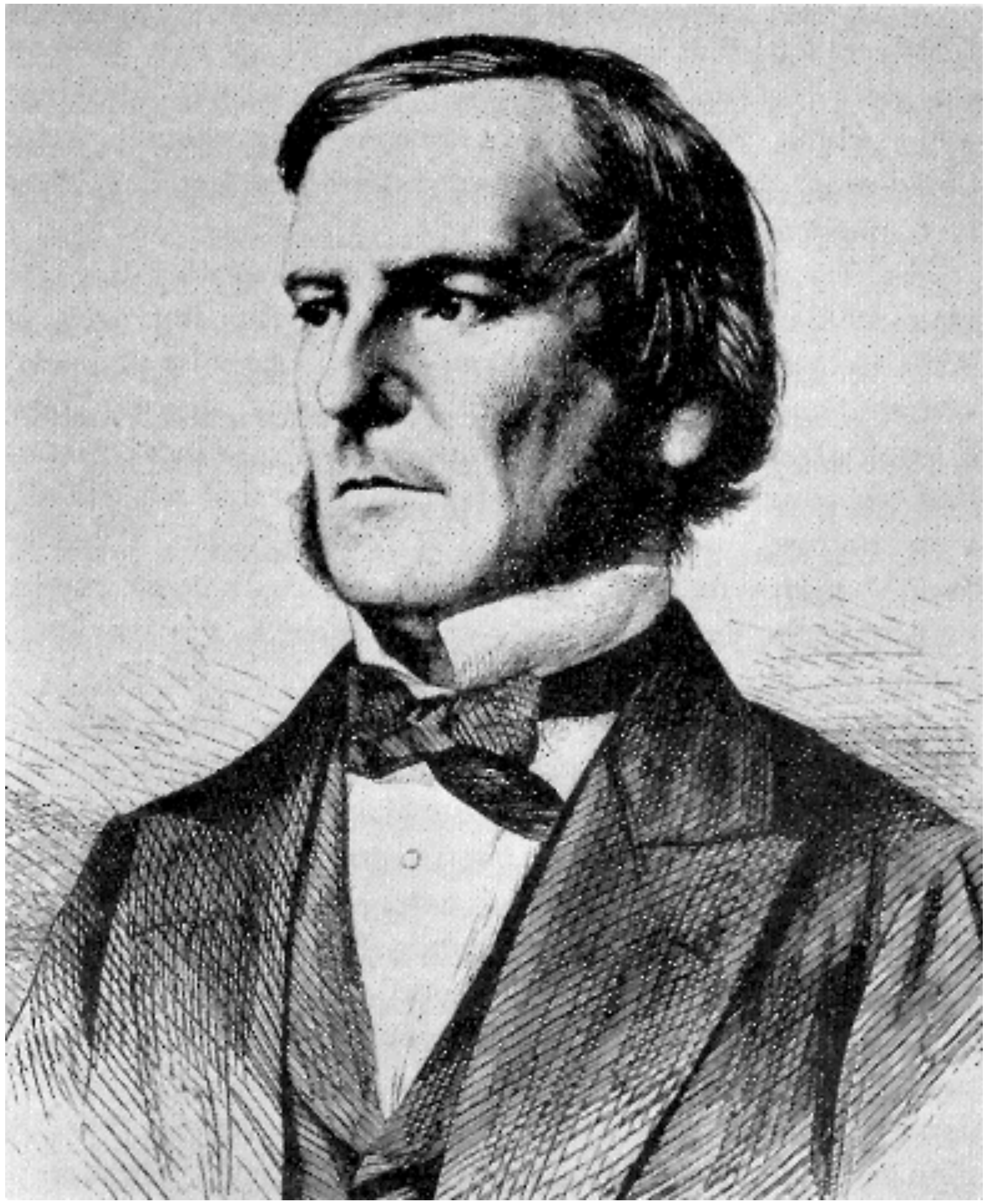
ATTENZIONE!

Questi li facciamo alla lavagna ;)

Trovate delle scansioni sul mio sito internet alessandronacci.it

George Boole

George Boole (Lincoln, 2 novembre 1815[1] – Ballintemple, 8 dicembre 1864[1]) è stato un matematico e logico britannico, ed è considerato il fondatore della logica matematica[1]. La sua opera influenzò anche settori della filosofia e diede vita alla scuola degli algebristi della logica.



Le operazioni logiche (*booleane*)

Operazione “and”

A	B	A and B
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Operazione “or”

A	B	A or B
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Operazione “not”

A	not A
F	V
V	F

Ci sono altri operatori?

Le operazioni logiche (*booleane*) - 2

A	NOT A
0	1
1	0

A	B	A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A OR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	A NOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

A	B	A NAND B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	A XNOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Un riassunto **non esaustivo** su…
https://it.wikipedia.org/wiki/Algebra_di_Boole#NOT

Proprietà logiche

Dimostrazione della proprietà di assorbimento

$$A \cdot (A + B) = A$$

Dimostrazione

$$A \cdot (A + B) = A \cdot A + A \cdot B = A + A \cdot B = A \cdot 1 + A \cdot B = A \cdot (1 + B) = A \cdot 1 = A$$

$$A + A \cdot B = A$$

Dimostrazione

$$A + (A \cdot B) = A \cdot 1 + A \cdot B = A \cdot (1 + B) = A \cdot 1 = A$$

Leggi di De Morgan

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

ATTENZIONE!

Questi li facciamo alla lavagna ;)

Trovate delle scansioni sul mio sito internet alessandronacci.it

Esercizio sulla Algebra di Boole

Si consideri la funzione booleana di 3 variabili G(a ,b, c) espressa dall’equazione seguente:

```
G(a, b, c) = a b c + !a !b c + !a b c + a b !c
```

<u>Si trasformi</u> - tramite le proprietà dell’algebra di commutazione - l’equazione di G in modo da ridurre il costo della sua realizzazione, indicando le singole operazioni svolte e il nome oppure la forma della proprietà utilizzata.

Esercizio sulla Algebra di Boole (soluzione)

a b c + !a !b c + !a b c + a b !c

Esercizio sulla Algebra di Boole (soluzione)

a b c + !a !b c + !a b c + a b !c	
a b c + !a !b c + !a b c + a b !c + a b c + !a b c	**idempotenza**
a b c + !a b c + !a b c + !a !b c + a b c + a b !c	commutativa
(a + !a) b c + !a (b + !b) c + a b (c + !c)	
	distributiva
a b c + !a b c + !a c + a b	commutativa
a b c + a b + !a b c + !a c	**assorbimento**
a b + !a c	forma minima

MOLTO CARINO MA…

Troppo intuitivo! Ergo, poco automatizzatile…

Esiste quindi un metodo più meccanico?

Mappe di Karnaugh (1)

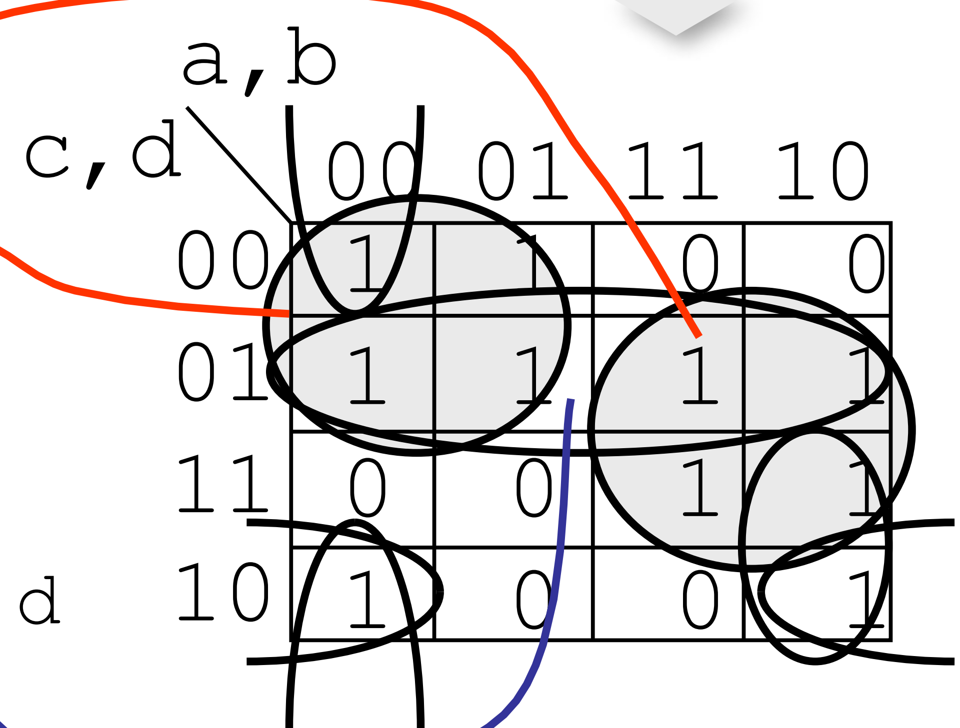
$$f(a,b,c) = \sum(001,011,101,110,111)$$

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	1	1	0	0
	1	1	1	1
	0	0	1	1
	1	0	0	1

a	b	c	d	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$f(a,b,c) = \sum(001,011,101,110,111)$$

a	b	c	d	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1



Implicanti primi essenziali

a'c'; ad

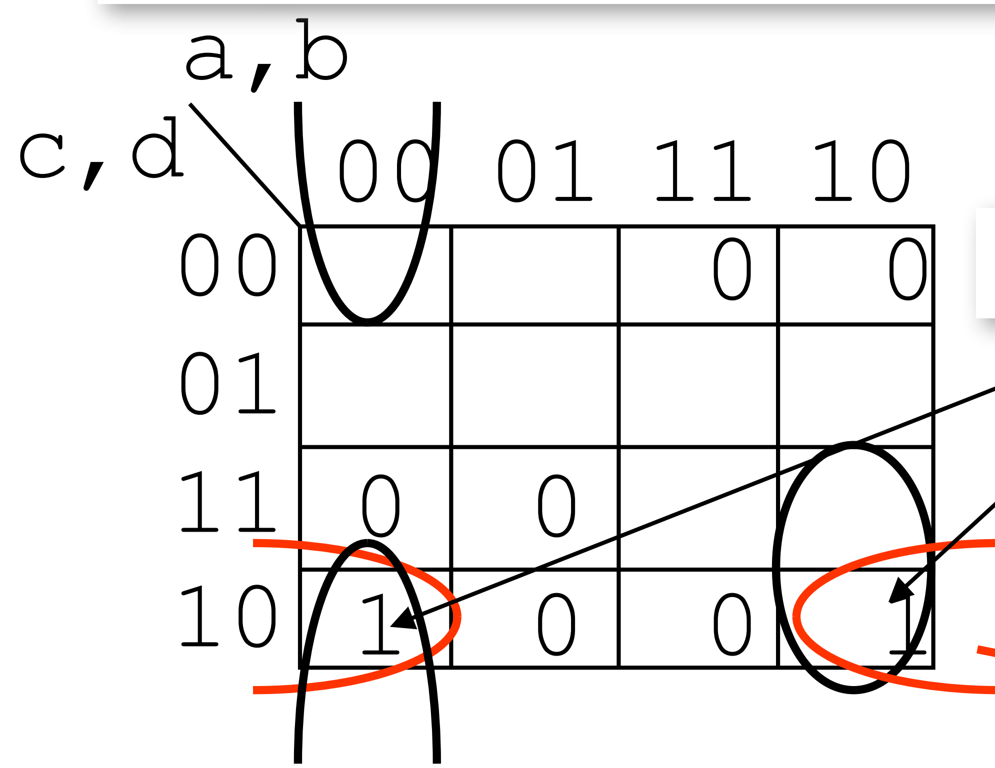
Implicanti primi

a'b'd'; b'cd'; ab'c; c'd

Completamente ridondante

Mappe di Karnaugh (3)

Tabella ottenuta dopo la selezione degli implicanti primi essenziali



1 da coprire

Implicanti primi essenziali

a'c'; ad

f(a,b,c,d)= a'c'+ad+b'cd'

Forma minima (unica)

Implicanti primi

a'b'd'; b'cd'; ab'c; c'd

Parzialmente ridondanti

Mappe di Karnaugh (4)

$$f(a, b, c, d) = \sum (0,2,4,5,10,11,13,15)$$

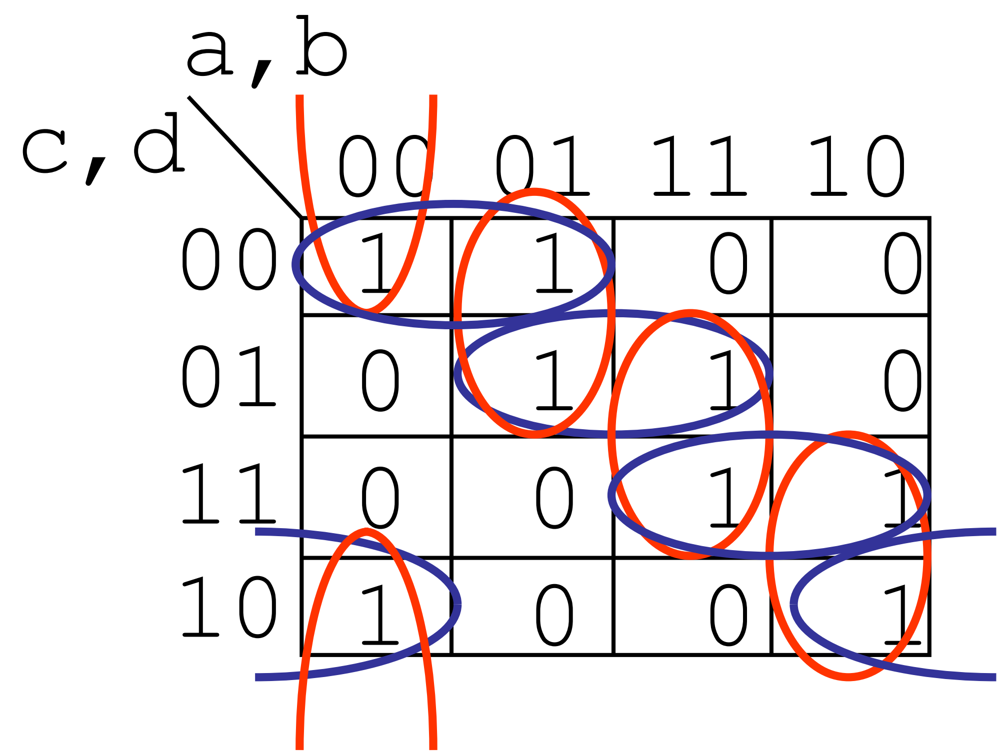
a	b	c	d
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Implicanti primi essenziali

Nessuno

Implicanti primi

a'c'd'; bc'd; acd; b'cd';
a'b'd'; a'bc'; abd; ab'c



f(a,b,c,d)= a'c'd'+ bc'd+ acd+ b'cd'
f(a,b,c,d)= a'b'd'+ a'bc'+ abd+ ab'c

Due forme minime

Mappe di Karnaugh (5)

- Online trovate una dispensa che le spiega con un altro esempio! :)

Tutte il materiale sarà disponibile sul mio sito internet!

www.alessandronacci.it